

Задаци за вежбу 2

задаци за домаћи обележени су *

1. Нека је $f: X \rightarrow X$ динамички систем. Докажите да се нелутајући скуп $\text{nw}(f)$ може окарактерисати као скуп свих тачака $x \in X$ таквих да за сваку околину U тачке x и свако $n \geq 1$ постоји $k \geq n$ тако да важи

$$f^k(U) \cap U \neq \emptyset.$$

2. * Нека је $f: X \rightarrow X$ динамички систем на компактном метричком простору. Доказати да важи

$$\text{chad}_{d_1}(f) = \text{chad}_{d_2}(f)$$

за било које две метрике d_1 и d_2 које задају исту топологију на X .

3. * Дати пример динамичког система који има нелутајућу тачку која није рекурентна.
4. Докажите да пресликавање $\tau: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, где је $\tau(x) = 2 \min\{x, 1 - x\}$, има осетљиву зависност од почетних услова.
5. Докажите да је пресликавање

$$e_2: S^1 \rightarrow S^1, \quad e_2(x) := 2x \bmod 1$$

фактор shift пресликавања

$$\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2.$$

6. Нека је $f: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ динамички систем дефинисан са

$$f(x) = 2x.$$

Доказати да, у односу на стандардну метрику

$$d(x, y) := |x - y|$$

на $(1, \infty)$, пресликавање f има осетљиву зависност од почетних услова. Нађите еквивалентну метрику на $(1, \infty)$ за коју f нема осетљиву зависност од почетних услова. (*Упутство*: Размишљајте о логаритмима.)

7. * Доказати да је динамички систем $f: X \rightarrow X$ хаотичан ако и само ако за сваку коначну фамилију (U_1, \dots, U_n) непразних отворених скупова постоји периодична тачка $x \in U_1$ пресликавања f и ненегативни цели бројеви k_2, \dots, k_n такви да

$$f^{k_i}(x) \in U_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$